• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* et u (IR*) = IR*

Et la fonction $\sin x$ est continue sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est continue sur IR* par suite $f(x)$ est continue sur IR* (produit de deux fonction continues)

Finalement : f est continue sur IR* et en 0 donc f est continue sur IR

• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$

Pas de limite en 0 donc f non dérivable en 0

• $x \to u(x)=\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* et u (IR*) = IR*

et la fonction $\sin x$ est dérivable sur IR* ce qui prouve que $\sin\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur IR* par suite $f(x)$ est dérivable sur IR* (produit de deux fonction dérivables)

Conclusion : f est dérivable sur IR*

● h restriction de f sur $]2,+\infty[$

a)

$$h'(x)=\sin\frac{\pi}{x}+x\times(-\frac{\pi}{x^2})\times(-\cos\frac{\pi}{x})$$

$$=\sin\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$$

$$x\succ 2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\prec\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\prec\frac{\pi}{x}\prec\frac{\pi}{2}\ d'ou\ h'(x)\geq 0$$

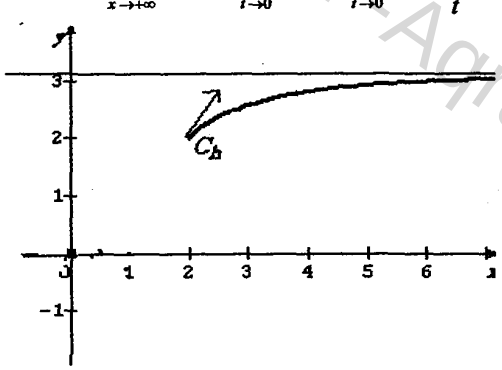
x	2		$+\infty$
h'(x)	‖	+	
h(x)	‖ 2	⟶	π

$$\lim_{x\to 2^+}h(x)=\lim_{x\to 2^+}x\sin\frac{\pi}{x}=2\times 1=2$$

Posons $t=\frac{\pi}{x}$, *si* $x\to+\infty$ *alors* $\frac{\pi}{x}\to 0$ *et* $x=\frac{\pi}{t}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{t\to 0}h(t)=\lim\limits_{t\to 0}(\pi\times\frac{\sin t}{t})=\pi$

b)



c) h est continue et strictement croissante sur $]2,+\infty[$

donc h réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur $]2,\pi[$

Exercice n° 21 $f(x)=\sqrt{tg(x)}$

● *f est dérivable sur* $]O;\frac{\pi}{2}[$ et on a :

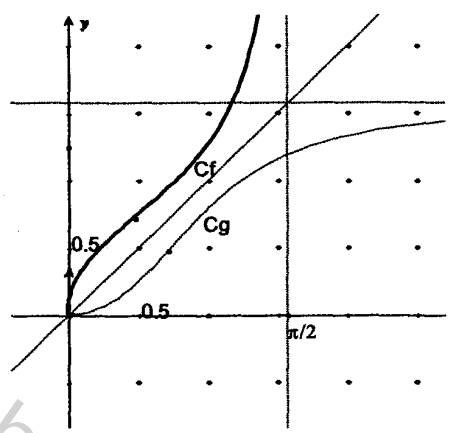
$$f'(x)=\frac{tg'(x)}{2\sqrt{tgx}}=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{tgx}}\succ 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f(x)	‖	+	
f(x)	‖ 0	⟶	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{tgx}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x\sqrt{tgx}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{tgx}{x}.\frac{1}{\sqrt{tgx}}=1\times\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc f est non dérivable à droite en 0 et Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut



● f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

donc f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$

3) $g=f^{-1}$

a) Cf admet au point O une demi-tg verticale dirigée vers le haut d'où Cg admet au point O une demi-tg horizontale d'où g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

f est dérivable sur $]O;\frac{\pi}{2}[$ et $f'(x)\neq 0\ \forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$,donc

g est dérivable sur $]0,+\infty[$

Conclusion : g est dérivable sur $[0,+\infty[$

* $\forall x\in]0;+\infty[$; $g'(x)=\frac{1}{f'[(g)(x)]}$

$$=\frac{1}{\frac{1+tg^2(g(x))}{2\sqrt{tg(g(x))}}}=\frac{2\sqrt{tg(g(x))}}{1+tg^2(g(x))}\ (1)$$

Oarray.tn-Agra Blech Oarray.tn